

麗台國際有限公司

Lead Taiwan International Corporation

台中市台灣大道二段 285 號 20F

TEL : 886-423232026 , Website : www.ltic.com.tw ,

Email : salestw@ltic.com.tw



文件序號：T2020183

## 技術類別：《齒輪應用》

|      |                               |
|------|-------------------------------|
| 技術類別 | 齒輪應用                          |
| 篇名   | 傘形齒輪齒數與角度的問題                  |
| 重點   | 傘形齒輪齒數與角度的問題                  |
| 產出日期 | 2020/02/25                    |
| 資料來源 | 日本 KHK / 台灣昭源提供<br>麗台國際有限公司整理 |



問：

請問，為什麼在傘形齒輪上，雖然有相同的模數與齒數，但是不一定能搭配咬合？煩請說明，謝謝。

答：

傘形齒輪是在相交的兩軸之間做傳動的圓錐形齒輪。傘形齒輪的齒形，理論上是長在球面上的漸開線，要加工並達到完美的齒形，幾乎是不可能的事。不過越接近理論齒形，傳動的效果（力矩，效率，噪音，振動，順暢度....）就越好。傘形齒輪，根據齒筋的形狀，分為：直齒傘形齒輪，彎齒傘形齒輪（圖 1.），零度傘形齒輪（圖 2.）。

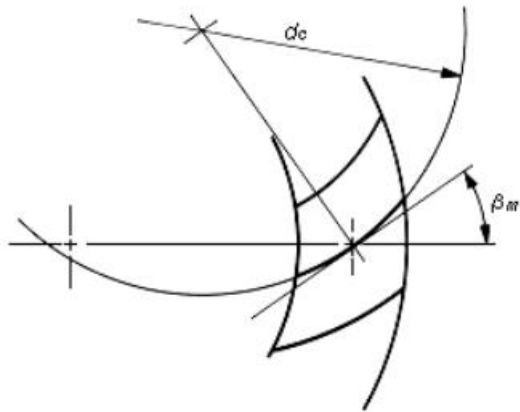


圖 1. 彎齒傘形齒輪

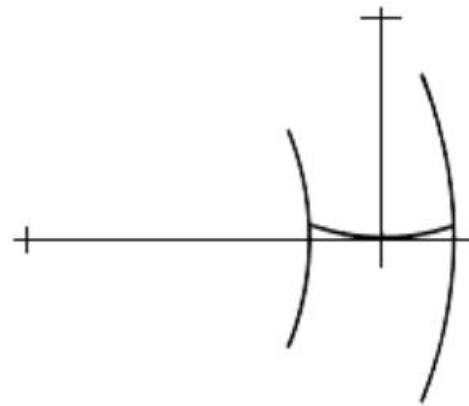


圖 2. 零度齒傘形齒輪

傘形齒輪是擁有圓錐形節圓的兩個齒輪，咬合轉動時於相切的兩個節圓錐上做純滾動接觸的齒輪。且這兩個做純滾動接觸的節圓錐，必須要有一致的圓錐頂點（圖 3.）。

齒數為  $z_1$  的小齒輪和齒數為  $z_2$  的大齒輪在軸角  $\Sigma$ （相交兩軸間的夾角）下咬合時，各節圓錐角為  $\delta_1, \delta_2$  的計算方法如下所示。

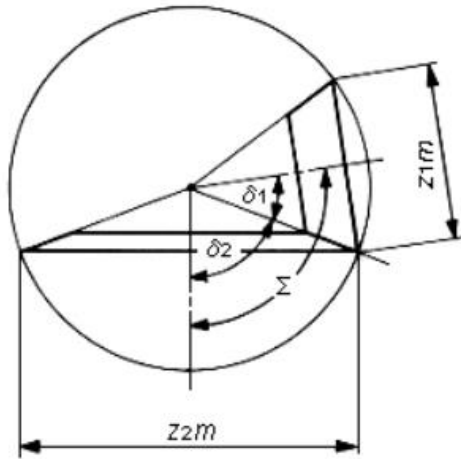


圖 3. 傘形齒輪的節圓錐角

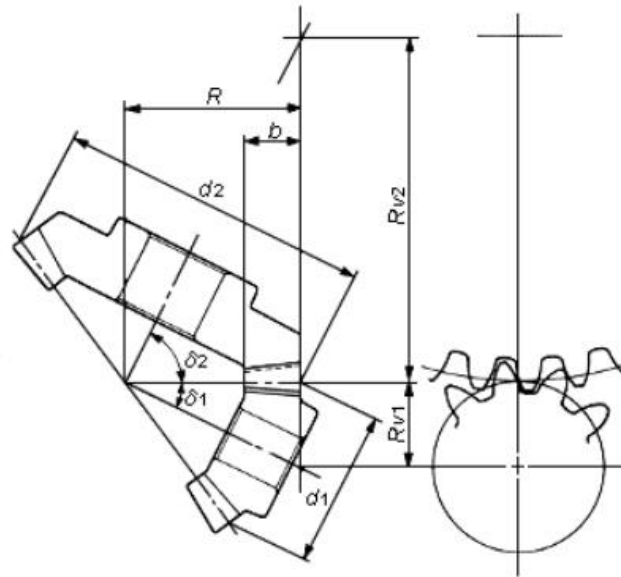


圖 4. 傘形齒輪的咬合

軸角與各節圓錐角的關係：

$$\begin{cases} \tan \delta_1 = \frac{\sin \Sigma}{\frac{z_1}{z_2} + \cos \Sigma} \\ \tan \delta_2 = \frac{\sin \Sigma}{\frac{z_1}{z_2} + \cos \Sigma} \end{cases}$$

軸角  $\Sigma$  為直角的情形最為常見，稱為直交（正交）傘形齒輪。除直角外，也可在銳角及鈍角的狀態下使用。在銳角及鈍角的狀態下使用的傘形齒輪被稱為斜交傘形齒輪（Angular bevel gears），如 KHK 45° : SAM2-20045，60° : SAM2-20060，120° : SAM2-20120。圖 3. 為軸角為鈍角的斜交傘形齒輪。

當軸角  $\Sigma = 90^\circ$  時，上述公式就變成下列關係式：

$$\begin{cases} \delta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \\ \delta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \end{cases}$$

軸角  $\Sigma = 90^\circ$ ，轉速比  $z_1/z_2=1$  的傘形齒輪被稱為（直交）等比傘形齒輪（Miter gears）。

傘形齒輪的咬合必須以一對的齒輪情況來考慮。確認之外的齒數組合無法正確咬合。



傘形齒輪的咬合，若如圖 4. 所示，由大端之軸直角方向為標準來看，可以得到類似於以背錐距離為中心距離的咬合正齒輪對，此正齒輪稱為等價正齒輪。

### Gleason 直齒傘形齒輪

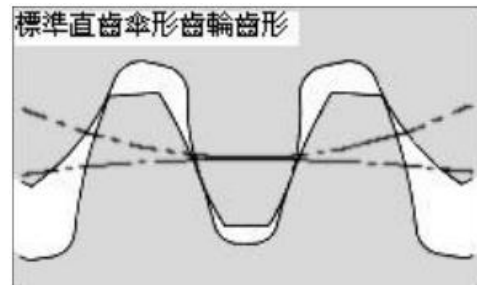
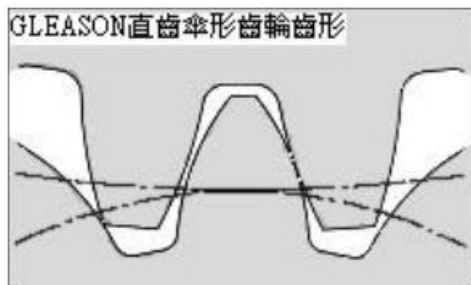
直齒傘形齒輪是齒筋為沿圓錐面指向圓錐頂點的直線形傘形齒輪。

直齒傘形齒輪具有代表性的有 Gleason 直齒傘形齒輪和標準直齒傘形齒輪兩種。

這裡所介紹的 Gleason 直齒傘形齒輪，其齒形為齒深  $h = 2.188m$ ，頂隙  $c = 0.188m$ ，有效齒深  $h' = 2.000m$ 。

這種齒輪的特點是：

- 是一種轉位齒輪  
為使大小齒輪的強度得以均衡，對小齒輪予以正轉位，對大齒輪予以負轉位，但是在大小齒輪齒數相等的等比傘形齒輪上，則不予轉位處理。



- 有平行的齒頂隙  
齒頂圓錐母線和相咬合齒輪的齒底圓錐母線平行。

Gleason 公司，將經過削鼓形加工的直齒傘形齒輪稱為 **coniflex gear**。經過此加工的 **coniflex** 齒輪對防止因裝配誤差而引起的單側齒承非常有效。

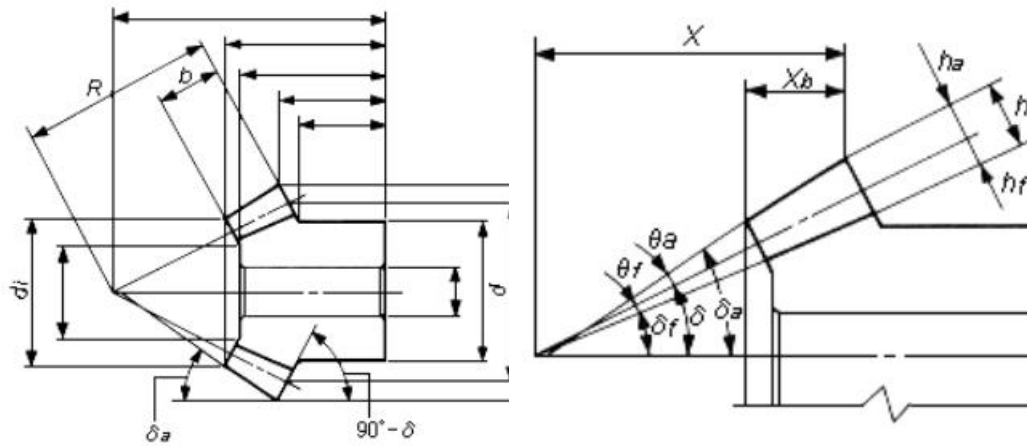


圖 5. Gleason 傘形齒輪的尺寸及角度

下表是 Gleason 直齒傘形齒輪的尺寸計算表，也可計算斜交直齒傘形齒輪。所計算出的尺寸及角度如圖 5. 所示。

直齒傘形齒輪的主要尺寸計算公式

| 序號 | 計算項目   | 記號       | Gleason 直齒傘形齒輪的計算 | 標準直齒傘形齒輪的計算 |
|----|--------|----------|-------------------|-------------|
|    |        |          | 計算公式              |             |
| 1  | 軸角     | $\Sigma$ |                   |             |
| 2  | 模數(大端) | $m$      |                   |             |
| 3  | 標準壓力角  | $\alpha$ |                   |             |
| 4  | 齒數     | $z$      |                   |             |
| 5  | 標準圓直徑  | $d$      |                   |             |
|    |        |          | $zm$              |             |

|   |        |                          |  |  |
|---|--------|--------------------------|--|--|
| 6 | 標準節圓錐角 | $\delta_1$<br>$\delta_2$ | $\tan^{-1} \left( \frac{\sin \Sigma}{\frac{z_2}{z_1} + \cos \Sigma} \right)$ $\Sigma - \delta_1$ |  |
| 7 | 圓錐距離   | $R$                      | $\frac{d_2}{2 \sin \delta_2}$  |  |
| 8 | 齒幅     | $b$                      | $R/3$ 或者 $10m$ 之內  |  |



|    |         |                                |   |  |
|----|---------|--------------------------------|---|--|
| 9  | 齒冠高     | $h_{a1}$<br>$h_{a2}$           | $2.000m - h_{a2}$<br>$0.540m + \frac{0.460m}{\left(\frac{z_2 \cos \delta_1}{z_1 \cos \delta_2}\right)}$ | 1.00m  |
| 10 | 齒根高     | $h_f$                          | $2.188m - h_a$  | 1.25m  |
| 11 | 齒根角     | $\theta_f$                     | $\tan^{-1}(h_f/R)$  | $\tan^{-1}(h_f/R)$                             |
| 12 | 齒頂角     | $\theta_{a1}$<br>$\theta_{a2}$ | $\theta_{f2}$<br>$\theta_{f1}$  | $\tan^{-1}(h_a/R)$                             |
| 13 | 齒頂圓錐角   | $\delta_a$                     | $\delta + \theta_a$   | $\delta + \theta_a$                            |
| 14 | 齒底圓錐角   | $\delta_f$                     | $\delta - \theta_f$   | $\delta - \theta_f$                            |
| 15 | 齒頂圓直徑   | $d_a$                          | $d + 2h_a \cos \delta$  | $d + 2h_a \cos \delta$                         |
| 16 | 冠頂距離    | $X$                            | $R \cos \delta - h_a \sin \delta$   | $R \cos \delta - h_a \sin \delta$              |
| 17 | 齒頂間軸向距離 | $X_b$                          | $\frac{b \cos \delta_a}{\cos \theta_a}$   | $\frac{b \cos \delta_a}{\cos \theta_a}$        |
| 18 | 小端齒頂圓直徑 | $d_i$                          | $d_a - \frac{2b \sin \delta_a}{\cos \theta_a}$  | $d_a - \frac{2b \sin \delta_a}{\cos \theta_a}$ |

Gleason 直齒傘形齒輪及 標準直齒傘形齒輪的計算例：

KHK 1 : 1 等比直齒傘形齒輪 SM2-20 / SM2-20

| 1 : 1              | Gleason 直齒傘形齒輪 |        | 標準直齒傘形齒輪 |        |
|--------------------|----------------|--------|----------|--------|
| 項目                 | 小齒輪 z1         | 大齒輪 z2 | 小齒輪 z1   | 大齒輪 z2 |
| 軸角 $\Sigma^\circ$  | 90             |        | 90       |        |
| 模數(大端)m            | 2              |        | 2        |        |
| 壓力角 $\alpha^\circ$ | 20             |        | 20       |        |

# 麗台國際有限公司

Lead Taiwan International Corporation  
 台中市台灣大道二段 285 號 20F  
 TEL : 886-423232026 , Website : www.ltic.com.tw ,  
 Email : salestw@ltic.com.tw



|                        |                    |             |                    |             |
|------------------------|--------------------|-------------|--------------------|-------------|
| 齒數                     | 20                 | 20          | 20                 | 20          |
| 標準(節)圓直徑 d             | 40                 | 40          | 40                 | 40          |
| 標準節圓錐角 $\delta^\circ$  | 45                 | 45          | 45                 | 45          |
| 圓錐距離 R                 | <b>28.28427125</b> |             | <b>28.28427125</b> |             |
| 背錐距離 Rv                | 28.28427125        |             | 28.28427125        |             |
| 齒寬 b                   | 10                 |             | 10                 |             |
| 齒冠高 ha                 | 2                  |             | 2                  |             |
| 齒根高 hf                 | 2.376              |             | 2.5                |             |
| 齒根角 $\theta_f^\circ$   | 4.801817176        |             | 5.051152528        |             |
| 齒冠角 $\theta_a^\circ$   | 4.801817176        |             | 4.044691235        |             |
| 齒頂圓錐角 $\delta_a^\circ$ | 49.80181718        | 49.80181718 | 49.04469124        | 49.04469124 |
| 齒底圓錐角 $\delta_f^\circ$ | 40.19818282        | 40.19818282 | 39.94884747        | 39.94884747 |
| 外端齒頂圓直徑 da             | 42.82842712        | 42.82842712 | 42.82842712        | 42.82842712 |
| 冠頂距離 X                 | 18.58578644        | 18.58578644 | 18.58578644        | 18.58578644 |
| 齒頂間軸向距離 Xb             | 6.477067812        | 6.477067812 | 6.571067812        | 6.554701491 |
| 小端齒頂圓直徑 di             | 27.4982915         | 27.4982915  | 27.6862915         | 27.72400547 |

## KHK 1.5 : 1 直齒傘形齒輪 SB2-2030 / 3020

| 1.5 : 1                | Gleason 直齒傘形齒輪     |             | 標準直齒傘形齒輪           |             |
|------------------------|--------------------|-------------|--------------------|-------------|
|                        | 小齒輪 z1             | 大齒輪 z2      | 小齒輪 z1             | 大齒輪 z2      |
| 軸角 $\Sigma^\circ$      | 90                 |             | 90                 |             |
| 模數(大端)m                | 2                  |             | 2                  |             |
| 壓力角 $\alpha^\circ$     | 20                 |             | 20                 |             |
| 齒數                     | 20                 | 30          | 20                 | 30          |
| 標準(節)圓直徑 d             | 40                 | 60          | 40                 | 60          |
| 標準節圓錐角 $\delta^\circ$  | 33.69006753        | 56.30993247 | 33.69006753        | 56.30993247 |
| 圓錐距離 R                 | <b>36.05551275</b> |             | <b>36.05551275</b> |             |
| 背錐距離 Rv                | 24.0370085         | 54.08326913 | 24.0370085         | 54.08326913 |
| 齒寬 b                   | 11                 |             | 11                 |             |
| 齒冠高 ha                 | 2.511111111        | 1.488888889 | 2                  |             |
| 齒根高 hf                 | 1.864888889        | 2.887111111 | 2.5                |             |
| 齒根角 $\theta_f^\circ$   | 2.960854631        | 4.578137291 | 3.966399237        |             |
| 齒冠角 $\theta_a^\circ$   | 4.578137291        | 2.960854631 | 3.174944328        |             |
| 齒頂圓錐角 $\delta_a^\circ$ | 38.26820482        | 59.27078711 | 36.86501185        | 59.4848768  |
| 齒底圓錐角 $\delta_f^\circ$ | 30.72921289        | 51.73179518 | 29.72366829        | 52.34353324 |
| 外端齒頂圓直徑 da             | 44.17874148        | 61.65177392 | 43.32820118        | 62.21880078 |



|            |             |             |             |             |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 冠頂距離 X     | 28.60708617 | 18.76116956 | 28.89059961 | 18.33589941 |
| 齒頂間軸向距離 Xb | 8.663965204 | 5.628307287 | 8.814091699 | 5.585423491 |
| 小端齒頂圓直徑 di | 30.50957306 | 42.71547428 | 30.10941225 | 43.26590714 |

KHK 2 : 1 直齒傘形齒輪 SB2-2040 / 4020

| 2 : 1<br>項目            | Gleason 直齒傘形齒輪 |             | 標準直齒傘形齒輪    |             |
|------------------------|----------------|-------------|-------------|-------------|
|                        | 小齒輪 z1         | 大齒輪 z2      | 小齒輪 z1      | 大齒輪 z2      |
| 軸角 $\Sigma^\circ$      | 90             |             | 90          |             |
| 模數(大端)m                | 2              |             | 2           |             |
| 壓力角 $\alpha^\circ$     | 20             |             | 20          |             |
| 齒數                     | 20             | 40          | 20          | 40          |
| 標準(節)圓直徑 d             | 40             | 80          | 40          | 80          |
| 標準節圓錐角 $\delta^\circ$  | 26.56505118    | 63.43494882 | 26.56505118 | 63.43494882 |
| 圓錐距離 R                 | 44.72135955    |             | 44.72135955 |             |
| 背錐距離 Rv                | 22.36067977    | 89.4427191  | 22.36067977 | 89.4427191  |
| 齒寬 b                   | 15             |             | 15          |             |
| 齒冠高 ha                 | 2.69           | 1.31        | 2           |             |
| 齒根高 hf                 | 1.686          | 3.066       | 2.5         |             |
| 齒根角 $\theta_f^\circ$   | 2.159034477    | 3.921938205 | 3.1996013   |             |
| 齒冠角 $\theta_a^\circ$   | 3.921938205    | 2.159034477 | 2.560638973 |             |
| 齒頂圓錐角 $\delta_a^\circ$ | 30.48698938    | 65.5939833  | 29.12569015 | 65.9955878  |
| 齒底圓錐角 $\delta_f^\circ$ | 24.4060167     | 59.51301062 | 23.36544988 | 60.23534752 |
| 外端齒頂圓直徑 da             | 44.81201829    | 81.17169962 | 43.57770876 | 81.78885438 |
| 冠頂距離 X                 | 38.79699543    | 18.82830038 | 39.10557281 | 18.21114562 |
| 齒頂間軸向距離 Xb             | 12.95650786    | 6.202403932 | 13.11640786 | 6.102104876 |
| 小端齒頂圓直徑 di             | 29.55601042    | 53.83308389 | 28.9613009  | 54.38343039 |

今以模數 2 齒數 20 為例，拿 KHK SM2-20 SB2-2030 SB2-2040 等傘形齒輪來比較並解釋傘形齒輪無法任意搭配使用的理由。

- SM2-20 / SM2-20            為 1 : 1            等比直齒傘形齒輪 (DWG 1.)
- SB2-3020 / SB2-2030    為 1.5 : 1        直齒傘形齒輪 (DWG 2.)
- SB2-4020 / SB2-2040    為 2 : 1            直齒傘形齒輪 (DWG 3.)

由上述的說明及計算結果能瞭解，縱使有相同的模數、齒數，也不見得一定能如正齒輪般地隨意更換配對齒輪的齒數。因為還要考慮到：





- ◎ 這兩個配對傘形齒輪的節圓錐有沒有做純滾動接觸（節圓錐的角度能否互相配合，也就是說兩節圓錐角度的和等不等於軸角）？
- ◎ 有沒有一致的圓錐頂點（圓錐距離 R 相同嗎）？
- ◎ 加工的系統是否相同（因為製造理念的不同，轉不轉位、是不是平行齒隙，都會影響到齒形及各個相關的角度）？
- ◎ 對彎齒傘形齒輪和零度傘形齒輪來說，如果是採用相同的加工系統，但是當製造時切削刀具的直徑（圖 1. 中的  $d_c$ ）或切削刀具的傾斜角度不同時，也是會影響咬合的可否。

.....

下列各圖是 KHK SM2-20，SB2-2030，SB2-2040 等傘形齒輪對部分上述說明的圖示。

