



文件序號：T2020065

## 技術類別：《齒輪應用》

技術類別	齒輪應用
篇名	齒頂寬不變尖之轉位係數是否有計算式
重點	齒頂寬不變尖之轉位係數是否有計算式
產出日期	2020/02/14
資料來源	日本 KHK / 台灣昭源提供 麗台國際有限公司整理



問：

在齒輪原理概要中有提到：原則上對小齒輪採用防止超切且齒頂寬不變尖之轉位係數為準。

而不發生齒根過切的界線轉位係數有計算公式  $x = 1 - \frac{z \cdot \sin^2 \alpha c}{2}$

想請問您齒頂寬不變尖之轉位係數是否有計算式可供運算？

答：

以應齒頂圓弧齒厚  $S_a$  來倒算即可

以  $\Psi_a = 0$ ，來反求  $x$ ，為齒頂變尖的轉位係數，要比此數小，齒頂才不會變尖。

### 漸開線曲線(involute curve)

從漸開線曲線的繪圖方法上可充分顯示出漸開線(或稱為漸伸線)正如其名。

如圖 3.3 所示，將一條一端固定在圓筒上的線，在張緊的情形下向外反轉鬆開，此時線的另一端所畫出的軌跡稱為漸開線曲線。而這個圓筒是此漸開線的基圓。沿著這個基圓轉動一條直尺，直尺上的一定點所經過的軌跡也為漸開線。根據漸開線的性質，弧  $ac$  與直線  $bc$  長度必須相等，所以：

$$\tan \alpha = \frac{bc}{oc} = \frac{r_b \theta}{r_b} = \theta \quad (\text{弧度(弧度)}) \quad (3.4)$$

$$\text{根據圖 3.3, } \theta \text{ 可以表示為 } \text{inv} \alpha = \tan \alpha - \alpha \quad (3.5)$$

$\alpha$  所對應的函數  $\text{inv} \alpha$  被稱為漸開線函數，漸開線函數在齒輪計算中所使用的頻率非常高。

以基圓的圓心  $O$  當成  $XY$  直角座標的原點，則漸開線函數在此直角座標系中可用下列公式表示。

$$\begin{cases} x = r \cos(\text{inv} \alpha) = \frac{r_b}{\cos \alpha} \cos(\text{inv} \alpha) \\ y = r \sin(\text{inv} \alpha) = \frac{r_b}{\cos \alpha} \sin(\text{inv} \alpha) \end{cases}$$

其中， $r = r_b / \cos \alpha$  (3.6)

用這個公式，可以簡單地描繪出漸開線齒形。

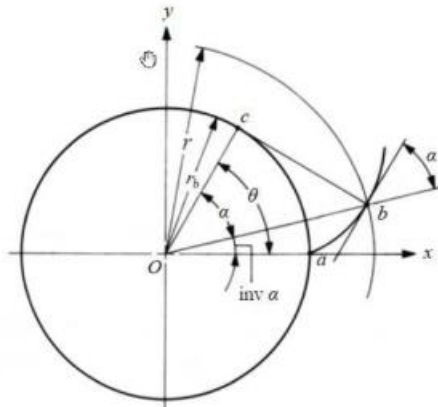


圖 3.3 漸開線曲線

### 漸開線齒輪的咬合

圖 3.4 所示為一對標準正齒輪的咬合狀態。

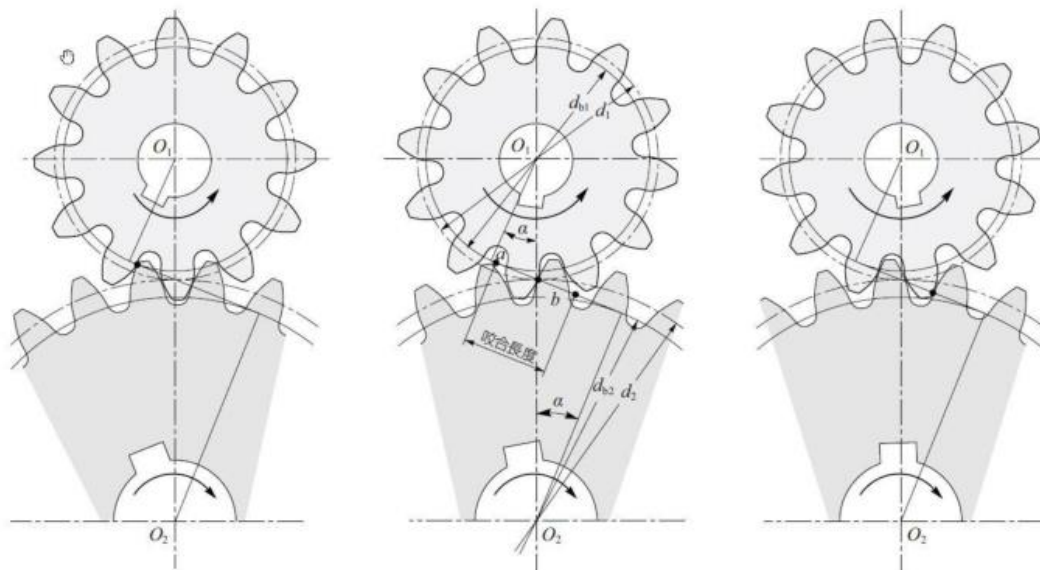


圖 3.4 漸開線齒輪的咬合

如圖所示，漸開線齒輪齒面的接觸點會在兩基圓的內公切線(作用線)上移動，因此，能成為一對齒輪的咬合條件，必須要在法線節距(基圓節距)  $P_b$  相等的情形下。

$$P_b = \pi m \cos \alpha \quad (3.7)$$

經由公式(3.7)可以看出，一對齒輪咬合的條件不僅僅是模數  $m$  必須相等，壓力角  $\alpha$  也必須相等，如此齒輪才能正確地咬合。

圖 3.4 中作用線上的長度  $ab$  被稱為咬合線長度(咬合長度)。



咬合線長度  $ab$ ，除以法線節距  $P_b$  的值被稱為軸直角咬合率(正面咬合率)。

$$\text{正面咬合率} \varepsilon_\alpha = \frac{ab}{P_b} \quad (3.8)$$

齒輪要維持連續平穩地傳動，咬合率必須大於 1。  
 因此，漸開線齒輪咬合時，模數和壓力角是十分重要的因素。

### 漸開線齒形的創生(generation)

利用齒條形刀具可以很容易地加工出漸開線齒形。使用創生原理而製造的切齒機械，較具代表性的有滾齒機及插齒機。

圖 3.5 顯示利用創生原理加工漸開線齒形時的模樣。標準正齒輪在創生時，齒輪的標準圓直徑(節徑)和齒條形刀具的標準節線在不產生滑動的條件下相切滾動，即可創生出如圖 3.5 所示的漸開線齒形。

漸開線齒輪的創生切削機械，還有另一種使用小齒輪形切齒刀的插齒機。這種插齒機，不但可以加工外齒輪，還可以加工內齒輪。

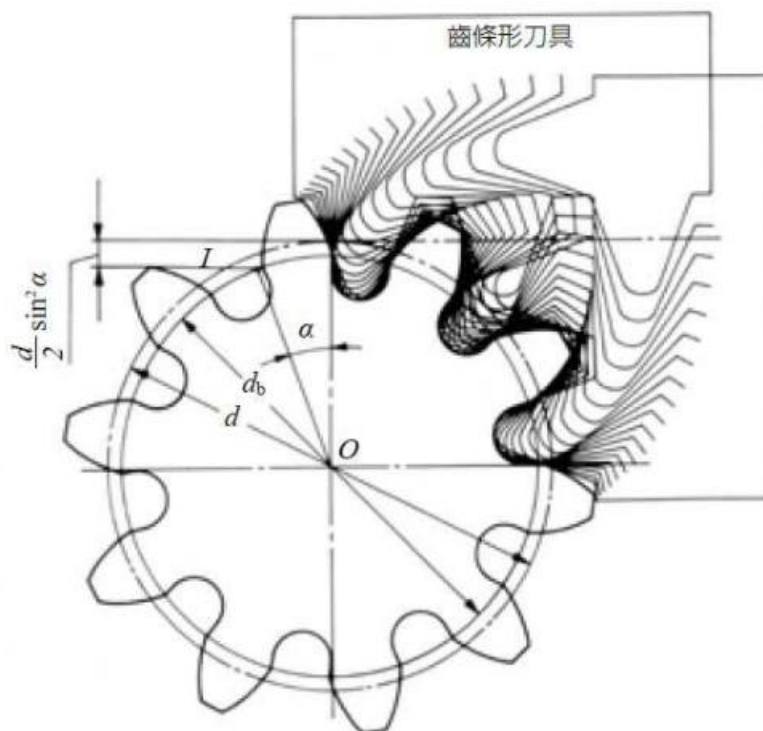


圖 3.5 標準正齒輪的創生  
 ( $\alpha = 20^\circ, z = 10, x = 0$ )

### 下切(under cut)

如圖 3.5 中所示的小齒數標準正齒輪切齒加工時，刀具切削深度超過干涉點 I 時，所產生的下切現象。



下切是刀具的刃部先端直線部分(  $h_c$  )將齒輪齒根部的齒形曲線切掉之現象。假設標準正齒輪的刀刃先端直線部的深度為  $1 \cdot m$ ，則不產生下切的條件為：

$$1 \cdot m \leq \frac{mz}{2} \sin^2 \alpha \quad (3.9)$$

根據這個條件，導出的標準正齒輪下切界限齒數  $z$  為：

$$z = \frac{2}{\sin^2 \alpha} \quad (3.10)$$

標準壓力角  $\alpha = 20^\circ$  時，下切界限齒數為  $z = 17$ 。不過，若在強度及咬合率等方面沒有問題時，即使是齒數在 16 以下也可以使用。

### 齒輪的轉位(profile shifting)

如圖 3.5 中所示的壓力角  $\alpha = 20^\circ$ ，齒數為  $z = 10$  的標準正齒輪在加工時會產生下切。

防止下切的方法之一是齒輪的轉位。轉位有正轉位和負轉位。為了防止如圖 3.5 中所示的下切，我們提出正轉位的例子，並圖示於 3.6 中。與圖 3.6 相反地，圖 3.7 為負轉位的例子。從圖中可以明顯地看出，由於採用負轉位，所以下切現象也變得更加嚴重。圖 3.6 和圖 3.7 所顯示的為轉位齒輪的加工，此時刀具的偏移量  $xm$  被稱為轉位量，而  $x$  則被稱為轉位係數。

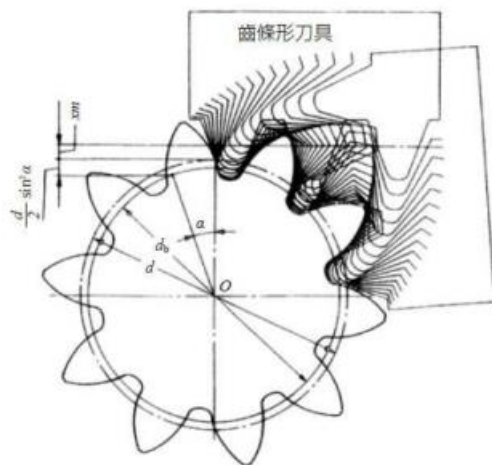


圖 3.6 正轉位正齒輪的創生  
 ( $\alpha = 20^\circ, z = 10, x = +0.5$ )

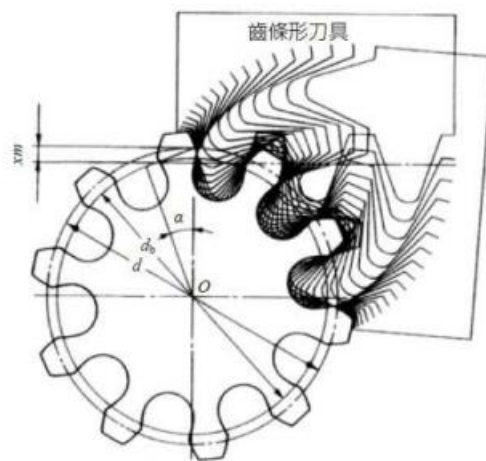


圖 3.7 負轉位正齒輪的創生  
 ( $\alpha = 20^\circ, z = 10, x = -0.5$ )

轉為齒輪不產生下切的條件是：

$$1 \cdot m - xm \leq \frac{zm}{2} \sin^2 \alpha \quad (3.11)$$

由此得出下切界限齒數  $z$  為：



$$z = \frac{2(1-x)}{\sin^2 \alpha} \quad (3.12)$$

同樣亦可得出，轉為係數  $x$  的值为：

$$x = 1 - \frac{z}{2} \sin^2 \alpha \quad (3.13)$$

除了防止下切的發生外，中心距離的調整，也經常使用齒輪的轉位。齒輪在轉位時除了必須討論下切問題外，齒頂的寬度過小也必須加以注意。小齒數齒輪在正轉位過大時，有可能會造成齒頂寬度不足甚至齒頂變尖。有關正齒輪齒頂寬度的計算方法列於下表中。

### 正齒輪齒頂寬度計算

序號	計算項目	記號	計算公式
1	齒頂圓壓力角	$\alpha_a$	$\cos^{-1} \frac{d_b}{d_a}$
2	齒頂圓弧齒厚半角(弧度(弧度))	$\psi_a$	$\frac{\pi}{2z} + \frac{2x \tan \alpha}{z} + (\text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_a)$
3	齒頂圓弧齒厚(齒頂寬)	$S_a$	$\psi_a \cdot d_a$

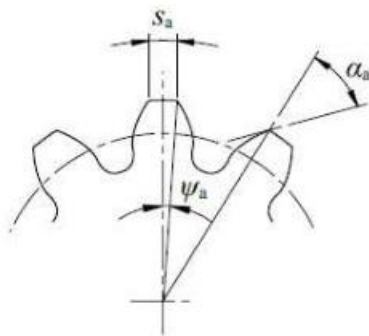


圖 3.8 齒頂圓弧齒厚

### 齒頂圓弧齒厚計算例

# 麗台國際有限公司

Lead Taiwan International Corporation

台中市台灣大道二段 285 號 20F

TEL : 886-423232026 , Website : www.ltic.com.tw ,

Email : salestw@ltic.com.tw



序號	計算項目	記號	單位	計算公式	計算例
1	模數	$m$	mm	設定值	2
2	壓力角	$\alpha$	度		20
3	齒數	$z$	-		16
4	轉位係數	$x$	-		0.3
5	標準圓直徑	$d$	mm	$zm$	32
6	基圓直徑	$d_b$		$d \cos \alpha$	30.07016
7	齒頂圓直徑	$d_a$		$d + 2m(1+x)$	37.2
8	齒頂圓壓力角	$\alpha_a$	度	$\cos^{-1} \frac{d_b}{d_a}$	36.06616
9	漸開線函數 $\alpha$	$\text{inv} \alpha$	弧度	$\tan \alpha - \alpha$	0.014904
10	漸開線函數 $\alpha_a$	$\text{inv} \alpha_a$		$\tan \alpha_a - \alpha_a$	0.098835
11	齒頂圓弧齒厚半角	$\psi_a$		$\frac{\pi}{2z} + \frac{2x \tan \alpha}{z} + (\text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_a)$	0.027893
12	齒頂圓弧齒厚(齒頂寬)	$s_a$	mm	$\psi_a d_a$	1.03762